

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВОЛЖСКИЙ ГУМАНИТАРНЫЙ ИНСТИТУТ

В.А. Мейдер

ФИЛОСОФИЯ ГЕГЕЛЯ И МАТЕМАТИКА

*Лекционный материал к курсам
«Философия» и «История и методология
математики»*

Волгоград 2003

Рецензенты:

К. М. Никонов, д-р филос. наук, проф.
Волгоградского государственного педагогического
университета;

В. В. Горяйнов, д-р физ.-мат. наук, проф.
Волжского гуманитарного института ВолГУ

Печатается по решению
учебно-методической комиссии ВГИ ВолГУ
(протокол № 2 от 4.09.2001 г.)

Мейдер В.А.

Философия Гегеля и математика: Лекционный материал к курсам «Философия» и «История и методология математики». — Волгоград: Изд-во Волгогр. гос. ун-та, 2003. — 36 с.

Предлагаемый материал лекций реализует цели социально-гуманитарного образования.

Предназначен студентам и аспирантам, изучающим курсы «Философия» и «История и методология математики».



© В.А. Мейдер, 2003

© Издательство Волгоградского
государственного университета, 2003

© Волжский гуманитарный институт, 2003

Что человек делает,
таков он и есть.

Гегель

Введение

Немецкая классическая философия представляет собой одно из наиболее значимых созданий человеческого разума. Ее крупнейшим представителем является Георг Вильгельм Фридрих Гегель /1770-1831/. Он был и остается одной из самых влиятельных фигур в области философского мышления, в произведениях которого определенное место отведено истории и методологии математики. К.Маркс не случайно открыто признавал себя “учеником этого могучего мыслителя”.

В литературе по философским проблемам математики имеется немало оценок, характеризующих воззрения Гегеля в этой области знания. Чаще всего такие оценки аргументируются отдельными положениями Гегеля, представленными им в “Феноменологии духа” /1807 г./ и “Науке логики” /1812 г./. Не учитывая должным образом сложный и противоречивый характер всего гегелевского учения, не вскрывая существенного различия его взглядов на элементарную и высшую математику, большинство авторов акцентирует свое внимание лишь на негативных сторонах воззрений Гегеля на математику и ее методологию.

Обстоятельное исследование философских воззрений Гегеля на математику, ее предмет и методы обнаруживает интересные его идеи, требующие логико-исторического осмысления и критического анализа. Причем следует иметь в виду, что, во-первых, учение Гегеля о математике также носит сложный и противоречивый характер; во-вторых, его исследование особенностей математики нацелено прежде всего на отыскание нового в философии; в-третьих, он существенным образом различает

элементарную и высшую математику: возможности математики бесконечного /дифференциального и интегрального исчисления/ в развитии научного познания оцениваются им гораздо выше соответствующих возможностей элементарной математики.

Будучи философом, Гегель был знаком и с важнейшими достижениями в области математики. Его интересовали и проблемы ее истории. Он изучал математические трактаты Декарта, Ферма, Ньютона, Лейбница, Эйлера, Лагранжа и других известных математиков 17-19 вв. Он, в частности, читал “Математические начала натуральной философии” Ньютона, “Геометрию неделимых” Кавальери, “Основания дифференциального исчисления” Эйлера, “Теорию аналитических функций” Лагранжа, “Геометрию” Декарта. Жизнь Гегеля протекала в период творческой деятельности таких выдающихся математиков, как Г.Монж /1746-1818/, К.Ф.Гаусс /1777-1855/, О.Л.Коши /1789-1857/, Н.И.Лобачевский /1792-1856/, Б.Больцано /1781-1848/. Он владел математикой настолько свободно, что, будучи директором Нюрнбергской гимназии, мог в случае необходимости заменить любого преподавателя высшей математики.

О математических познаниях Гегеля свидетельствует, например, Ф.Энгельс. Причем изучение Энгельсом “Науки логики” Гегеля, особенно второго раздела “Величина /количество/”, явилось одной из предпосылок его обращения к вопросам математики, ее истории и методологии. В письме Ланге от 29 марта 1865 г. Энгельс писал: “Я не могу упомянуть о Вашем замечании по поводу старика Гегеля, которому Вы отказываете в глубоком математическом и естественно-научном образовании. Гегель знал математику настолько, что никто из его учеников не был в состоянии издать оставшиеся после него многочисленные математические рукописи. Единственный человек, знающий, насколько мне известно, достаточно математику и философию для того, чтобы это сделать, - это Маркс” (7, т.31. С.395).

Из множества философских проблем математики, которые в той или иной степени рассмотрены Гегелем, мы остановимся лишь на его воззрениях относительно математики как науки, ее отличии от философии и обосновании им анализа бесконечно малых.

Эту сторону творчества философа трудно переоценить. Непосредственной же причиной написания данной работы явилась необходимость показать студентам ту грань многогранной деятельности Гегеля, которая весьма поверхностно представлена в нашей учебной философской литературе, хотя тема «Классическая немецкая философия» одна из центральных в курсе истории философии.

Обращение Гегеля к методологическим проблемам математики есть доказательство единства и диалектической взаимосвязи философии и математики. По выражению Д.Д.Мордухай-Болтовского”, математика и философия “...два близнеца, родившиеся в одно время и в своем младенчестве лежавшие в одной колыбели” (9. С.1). Математика была и остается одним из важнейших источников философских обобщений. Подлинный философ должен быть и математиком. История науки показывает нам правомерность и обратного: “почти все действительно великие математики были философами-мыслителями” (1. С.259). И если находятся математики, которые утверждают ненужность диалектики, философии в их построениях, то они тем самым, по выражению А.Д.Александрова, проявляют “самодовольную некультурность”.

Помимо математики, философско-мировоззренческие представления Гегеля формировались на основе таких естественных наук, как механика, физика, химия.

1. Философские воззрения Гегеля на математику и математическое познание

Прежде всего поставим вопрос: Каковы причины, побудившие Гегеля обратиться к математике и математическому познанию? Частично на этот вопрос можно ответить словами самого Гегеля из его “Феноменологии духа”: “Моим намерением было - способствовать приближению философии к форме науки - к той цели, достигнув которой она могла бы отказаться от своего имени любви к знанию и быть действительным знанием” (4. С.3).

Математику Гегель считает наукой прежде всего потому, что она доказательна. Второй специфической чертой математики, которой она “гордится и кичится перед философией”, является очевидность ее положений.

Прежде чем определить предмет математики, Гегель в “Науке логики” ставит более общий вопрос: Что значит дать понятие о некоторой науке? Обычный способ разъяснения такого понятия, пишет он, может самое большое привести к тому, что оно “станет объектом представления и о нем будут получены исторические сведения” в виде некоторой общепринятой дефиниции предмета и цели этой науки. Гегель считает более совершенным такой путь определения науки, при котором будет показана “необходимость ее предмета и, следовательно, также ее самой” (5,С.102). Определение предмета науки, по Гегелю, является определяющим элементом ее системы. Но обоснование предмета математики не может быть проведено в пределах этой науки, так как она задает свой предмет с помощью лемм, предполагает известными и принятыми некоторые определения, понятия и т.п., которые составляют часть содержания логики /философии/ и “сначала должны получить свое обоснование внутри нее” (там же. С.95.)

Философский анализ предмета математики Гегель начинает с указания философской категории, содержание которой может служить наиболее общей характеристикой этого предмета. Такой категорией является величина /количество/. “Величина, - пишет он, - есть определенность, которая больше не едина с бытием, а уже отлична от него, она снятое, ставшее безразличным

качество. Она включает в себя изменчивость бытия, не изменяя самой вещи, бытия, определением которой она служит” (там же. С.137). Как видим, под словом “величина” Гегель понимает определенное количество, при этом отличая его от чистого количества (см. там же. С.256).

Чистое количество - это абстрактная и логически исходная форма количества, представляющее собой единство непрерывности и дискретности. Они выступают моментами непрерывной и дискретной величины. “В обычных представлениях о непрерывной и дискретной величинах,- пишет Гегель, - упускают из виду, что каждая из этих величин имеет в себе оба момента, и непрерывность и дискретность, и их отличие друг от друга составляет только то, какой из двух моментов есть положенная определенность и какой есть только в-себе-сущая определенность” (5. С.274). Единство прерывности и непрерывности в математике устанавливается им в конечном счете из того, что материя обладает обеими этими качествами.

Непрерывная величина в виде пространственной величины является предметом геометрии, а дискретная в виде числовой величины-предметом арифметики. Неоднородность предметов этих наук обуславливает и неодинаковость их способа приложения. “Геометрия, как таковая, - пишет Гегель, - не измеряет пространственных фигур, не есть искусство измерения, она лишь сравнивает их. В даваемых ею дефинициях определения также отчасти заимствуются ею из равенства сторон, углов, из равного расстояния. Так, например, круг /точнее, окружность - В.М./, основывающийся единственно лишь на равенстве расстояния всех возможных в нем точек от одного центра, не нуждается для своего определения ни в каком числе. Эти определения, основывающиеся на равенстве или неравенстве, суть подлинно геометрические. Но их недостаточно, и для определения других фигур, например, треугольника, четырехугольника, требуется число...” (там же. С.279). “Арифметика,- продолжает он,- рассматривает число и его фигуры /Гегель имеет в виду числа “треугольные”- натуральные числа вида $n \cdot (n+1)/2$,

т.е. 1, 3, 6, ... и “квадратные”- натуральные числа вида n^2 , т.е. 1, 4, 9, ...-В.М./, или, вернее, не рассматривает их, а оперирует ими” (там же. С.280). Число есть определенное количество и прежде всего выступает как дискретная величина, “но в единице оно обладает и непрерывностью” (там же. С.277). “...Число есть безразличная, инертная определенность; оно должно быть приведено в действие и в соотношение извне. Способы такого соотнесения - это (четыре) арифметических действия. Они излагаются в арифметике одно после другого, и ясно, что одно действие зависит от другого” (5. С.280). Здесь важно обратить внимание, что хотя счет рассматривается философом как нечто внешнее, механическое занятие, которое можно передать машине, он /счет/ вместе с умением пользоваться числом составляет главную педагогическую основу (5. С.292).

С точки зрения Гегеля, качественное различие, составляющее определенность числа, выражается в различии между единицей и численностью. “Различие между численностью и единицей, -пишет он, - возникающее в дальнейшем развитии арифметических действий, служит основой системы чисел - двоичной, десятичной и т.д.; такая система покоится в общем на произвольном выборе той численности, которая постоянно должна снова и снова быть взята как единица” (там же. С.281).

Известно, что Кант оперирование с числами рассматривал как априорную деятельность. Гегель же считает, что все науки, в том числе и математика, формируются на основе опыта, практики. Предмет математики - количество - выделяется как нечто производное от качественного бытия. “...Началом служит бытие, как таковое, - пишет он, - значит, качественное бытие. Из сравнения качества с количеством легко увидеть, что по своей природе качество есть первое. Ибо количество есть качество, ставшее уже отрицательным” (там же. С.137). *Apriori*, по Гегелю, это нечто смутное, неопределенное.

Свои воззрения на предмет математики Гегель неоднократно выражал и в “Феноменологии духа”. Считая, что математика рассматривает “одну лишь величину”, он обращал внимание на то, что величина “есть как раз несущественное, лишенное понятия отношение. Движение знания совершается поэтому на поверхности, касается не самой сути дела -сущности или понятия - и в силу этого не есть постижение в понятии. - Материал, относительно которого математика обеспечивает удовлетворяющий запас истин, есть пространство и (счетная) единица” (4. С.23). Абстрактное пространство, составляющее предмет геометрии, “есть наличное бытие, в которое понятие вписывает свои различия, как в пустую мертвую стихию, где они точно так же неподвижны и безжизненны. Действительное не есть нечто пространственное в том смысле, в каком оно рассматривается в математике; с такой недействительностью, каковы вещи в математике, не имеет дела ни конкретное чувственное созерцание, ни философия” (там же).

Как видим, Гегель довольно правильно понимал особенность математики, состоящую в том, что в ней непосредственному исследованию подвергаются закономерности абстрактных структур. Его мысль о том, что “математика наука точная потому, она наука тощая”, как раз и свидетельствует о том, что вместо полнокровной, богатой свойствами и отношениями действительности перед математиком предстает “тощая” схема /структура/, лишенная качественного многообразия реального мира. Современная математика с момента создания теории множеств и абстрактной алгебры занимается не столько числовыми отношениями и их алгебраическими обобщениями, сколько такими абстрактными образованиями, которые называют структурами. А если говорить словами Н.Бурбаки, то “единственными математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры” (2. С.251).

К трактовке математического знания Гегель подходил с учетом своего различия между рассудком и разумом. Разум он понимал как единство

субъективного и объективного. “Спекулятивное или разумное и истинное, - читаем мы у него, - заключается в единстве понятия или единстве субъективного и объективного” (3. С.248). Рассудку же, по Гегелю, соответствует субъективное понятие. Что касается математики, то ее он причисляет к рассудочным формам мышления, ибо она имеет только субъективное значение и не касается сферы бытия.

Но будучи великим диалектиком, он видел, что математика не уместится в рамках рассудка. Геометрия, например, обнаружив несоизмеримые отрезки /а, следовательно, иррациональные числа/ “вынуждена выйти за пределы принципа рассудка”. Еще в большей мере это относится к высшей математике. Говоря о трудностях, связанных с пониманием и определением бесконечно малых величин, он вынужден был признать, что математика обязана своими самыми блестящими успехами тому, что она приняла то определение, которого не признает рассудок” (5. С.165). Однако, по его мнению, элементы разума, которые встречаются в математике, не могут быть ею освоены. Попытки же включить их в математику будут бесплодными, ибо она не является наукой о понятиях /как философия/ и на ее почве фактически совершенно невозможно приживление разумных элементов.

Как видим, Гегель существенным образом различает математику и философию.

2. Гегель об отличительных особенностях математики и философии

Изучение произведений Гегеля позволяет нам выделить несколько таких отличительных особенностей.

1. Как в “Феноменологии духа” (см: 4. С.23-24), так и в “Науке логики” (см: 5. С.256) Гегель считает, что математика рассматривает одну лишь величину, под которой понимает определенное количество. Но величина, как уже отмечалось, “есть как раз несущественное, лишенное понятия отношение. Движение знания совершается поэтому на поверхности, касается не самой сути дела - сущности или понятия - и в силу этого не есть постижение в понятии” (4. С.23). Иными словами, познание в математике направлено на изучение количественных сторон предмета. При этом он выделяет такие ей специфические особенности, как доказательность, высокая степень абстрактности понятий, односторонность в отражении действительности и другие. Философия же стремится раскрыть количественную определенность в единстве с ее “противоположностью” - качеством.

Действительно, понятия математики выражают прежде всего внешние стороны предметов реального мира - количественные отношения и пространственные формы. Но может ли математика полностью отвлечься от качества? Являются ли ее понятия чисто количественными? Если исходить из того, что количество находится в диалектическом единстве с качеством, что количественное исследование объектов возможно лишь при наличии их однородности и чисто количественное различие вещей предполагает одинаковость их качества, то на поставленные вопросы мы должны ответить отрицательно. Математика стремится отвлечься от качественной стороны действительности, создавая все более “емкие” абстракции. Но при этом она отвлекается не от качества вообще, не от любого качественного момента, а от качественной специфики явлений. Математика изучает качественные сходство и различие, но не самих областей действительности, а количественных определенностей и их отношений /связей, функций/. Иными словами, хотя математика и имеет дело с количественными отношениями и пространственными формами самой различной природы, внутри самой

математической теории они являются содержательными и обладают специфическим качеством. Именно о таком качестве и идет речь в математике, и так его понимал Ф.Энгельс, когда писал, что “число есть чистейшее количественное определение... Но оно полно качественных различий” (7. Т.20. С.573).

Да и сам Гегель в одном из своих примечаний признает, что “уже натуральная система чисел обнаруживает такую узловую линию качественных моментов, проявляющихся в чисто внешнем продвижении. Эта система есть, с одной стороны, чисто количественное движение в обоих направлениях - постоянное прибавление или убавление, так что каждое число находится в том же арифметическом отношении к своему предшествующему и последующему, в каком эти последние находятся к своим предыдущим и последующим и т.д. Но возникающие благодаря этому числа имеют к другим предыдущим еще и некоторое специфическое отношение: или одно число есть кратное другого и выражено другим числом, или оно степень и корень” (5. С.464-465). Продолжая мысль Гегеля, можно сказать, что всякое число /количество/ обладает различными качественными характеристиками. Оно может быть четным или нечетным, простым или составным, совершенным или несовершенным, лежать в основе системы счисления или нет и т.п.

Диалектическая взаимосвязь качества и количества в математике прослеживается еще более явственнее, когда мы исследуем вопросы математического анализа, высшей геометрии, топологии. В связи с этим можно вспомнить слова творца топологии - А.Пуанкаре: “Эта геометрия - чисто качественная, ее теоремы остались бы справедливыми, если бы точные фигуры были заменены грубыми изображениями, созданными ребенком” (11. С.44).

Гегелевские положения легко понимаются, если вспомнить, что исторически математику рассматривали прежде всего как науку о количестве и величине. Роль математики ограничивалась выражением в основном

количественных отношений реального мира. И если сравнить математику с естествознанием или философией, то у нее количество выражено в наиболее явном виде, разрыв же качества и количества носит не абсолютный, а относительный характер.

Обособление Гегелем математического количества от качественной определенности предметов действительного мира явилось основой недооценки им идейного содержания арифметики и ее роль в системе математических знаний. Отмечая, что главную педагогическую основу должно составлять пользование числом и счетом, он считает, что “число нечувствительный предмет, и занятие им и его сочетаниями - нечувственное занятие” (5. С.292).

Действительно если рассматривать арифметику как главное средство “воспитания юношеского духа”, то нужно с Гегелем согласиться, что она таковым не является. Воспитательное значение арифметики состоит в том, что она формирует способность к абстрактному мышлению. Это важный, но все же ограниченный и односторонний этап в процессе развития математического познания. Прав Гегель и в том отношении, что арифметические отношения /зависимости и выражения/ имеют исторически преходящее значение как формы выражения философских положений. В этом смысле арифметика исчерпала себя уже на уровне пифагорейской философии, в младенческий период философствования. Но вместе с тем, в арифметике он выделяет такие черты, которые значительно расширяют познавательные возможности. Речь идет об алгоритмичности арифметических операций, о выполнении действий по строго установленным правилам.

Так как счет, по Гегелю, есть внешнее и механическое занятие (на этот момент мы уже обращали внимание), то это позволяет изобрести машины, “совершеннейшим образом выполняющие арифметические действия” (5. С.292). Но тот факт, что арифметические действия можно передавать

машине, по Гегелю, служит свидетельством утраты арифметической способности быть средством воспитания юношеского духа.

Как известно, последующий исторический процесс развития научного познания, создание ЭВМ показали пути проникновения арифметики в самые различные области знания, и тем самым, ошибочность воззрений Гегеля по данному вопросу. Алгоритмизация и машинизация арифметических действий - это никак не погружение ума в изнурительную, однообразную и механическую работу, а наоборот, освобождение ума от такой работы, раскрепощение его для выполнения более творческих функций, целей и задач.

2. Исходя из различия предметов исследования в математике и философии, Гегель существенно различает их методы и роль в развитии научного познания. Что касается математики, то здесь ее метод правомерен, “он свойственен математике и должен быть оставлен за математикой” (4. С.25). Но он отказывает в действительности методов математики в других науках. Правда, из множества познавательных методов математики Гегель выделяет лишь один, аксиоматический метод, посредством которого “познавание осуществляется через способ изложения доказательства”. При этом возможности аксиоматического метода Гегелем явно недооцениваются. “Пусть это прозвучит несколько хвастливо или революционно, - пишет он, - ...все же нельзя забывать, что научный аппарат, которым снабжает математика, - определения, подразделения, аксиомы, ряд теорем, их доказательства, основоположения и следствия и выводы из них, ... по меньшей мере устарел. Хотя его непригодность и не усматривается отчетливо, все же им больше не пользуются или пользуются мало; и если его как таковой и не порицают, то все же его не любят” (там же. С.25). И далее дополняет, что помимо самой математики “при более вольном обращении, т.е. с большим допущением произвола и случайности, этот метод мог бы оставаться в обыденной жизни - в собеседовании или историческом

поучении, призванном более к тому, чтобы дать познание...” (там же. С.25-26). В процессе доказательства, поясняет Гегель, вводятся конкретные определения и отношения, и отбрасываются /игнорируются/ другие. Причем порой трудно установить причину, в силу которой это осуществляется, ибо “Этим движением управляет некоторая внешняя цель”.

Действительно, при аксиоматическом построении той или иной математической теории необходимость последующих предложений /теорем/ не вытекает однозначно; не видна необходимость чертежа, проведения именно таких дополнительных линий при доказательстве теоремы. Само доказательство может идти различными путями. Однако, при всем этом, не следует забывать, что формирование и доказательство теорем не произвольный процесс. Он определяется заданными аксиомами, определениями и доказанными ранее положениями /теоремами/. Кроме того, сама система аксиом должна быть непротиворечива, полна и независима.

Некоторые пессимистические нотки звучат и в “Науке логики”, когда Гегель анализирует трудности, связанные с обоснованием операций с бесконечно малой величиной в дифференциальном и интегральном исчислении. Тот факт, что математика не может собственными силами разрешить противоречия в анализе, он распространяет и на другие проблемы как в самой математике, так и в других науках. Гегель пишет, что “математика вообще не в состоянии доказать определение величины в физике, поскольку эти определения суть законы, имеющие своей основой качественную природу моментов; математика не в состоянии это сделать по той простой причине, что она не философия, не исходит из понятия, а потому качественное, поскольку оно не почерпается с помощью лемм из опыта, находится вне ее сферы” (5. С.358).

Безусловно, с такой оценкой Гегелем возможностей математики согласиться нельзя, даже если она касается только математики конечных величин и, в частности, аксиоматического метода. Обращение к истории

математики, анализ эвристической роли аксиоматического метода в развитии научного познания говорит о противоположном. Вспомним, что по аксиоматическому образцу “Начал” Евклида построены работы Архимеда по статике и гидростатике; написана книга Тарталья “Новая наука”, содержащая вопросы теории артиллерии; изложен трактат Ньютона “Математические начала натуральной философии”, содержащий необходимый естествознанию обычный метод исчисления бесконечно малых и т.д.

Кроме того, уже при жизни Гегеля создается неевклидова геометрия Н.И.Лобачевского /1826 г./, показавшая чрезвычайную плодотворность аксиоматического метода. А прошедшие после Гегеля более 150 лет в этом отношении были еще более интенсивными. Достаточно сослаться на аксиоматическое построение теории вероятностей, теории множеств, термодинамики, специальной теории относительности, теории элементарных частиц, некоторых областей биологии и т.д.

3. Что касается применения математики в философии, то в “Науке логики” Гегель повторяет мысль, высказанную им в “Феноменологии духа” в том плане, что “философия, поскольку она должна быть наукой, не может ... заимствовать свой метод у такой подчиненной науки, как математика...” (5. С.78). Для подтверждения этого он обращается к истории и отмечает, что математику неоднократно толковали как идеал науки, “к достижению коего философия должна-де стремиться” (4. С.20). Он сетует, что Спиноза, Вольф и другие «впали в соблазн», применив метод математики к философии. Философия «смотрела с завистью на системное построение математики и ... заимствовала у нее ее метод» (5. С.107). Поэтому считает Гегель, философия не смогла достичь уровня достоверности, достоверной системы знаний. Лишь постепенно более отчетливо осознавалось своеобразие философского метода и необходимость его разработки. Философский метод “есть абсолютный метод познания и вместе с тем имманентная душа самого содержания. -Я утверждаю, что философия способна быть объективной, доказательной

наукой лишь на этом конструирующем себя пути” (5. С.79). В философии “движение познания должно определяться природой вещей и самого содержания. ...Здесь дело обстоит не так, как в тех построениях, которые приходится делать для доказательства геометрической теоремы...” (там же. С.129).

С этой точки зрения Гегель оценивает и многократные попытки применить математические зависимости в качестве форм выражения философских положений (см. там же. С.287-290). Он считает стремление многих поколений мыслителей рассматривать математику средством формирования общих логических, философских понятий необоснованным и бесперспективным, демонстрирующим “философское бессилие”. По Гегелю, “заимствование математических категорий с целью что-то определить для метода или содержания философской науки” является “по своему существу превратным”, ибо “математические формулы обозначают мысли и различные понятия” и это их значение “скорее должно быть сначала указано, определено и обосновано в философии. В своих конкретных науках философия должна почерпать логическое из логики, а не из математики” (там же С.291).

Вместе с тем, Гегелю хорошо было известно, что еще со времен Пифагора и Платона “философия применяла числа и формы их соотношения, как например, степени и т.п., для упорядочения мыслей в соответствии с ними или выражения ими мыслей” (там же. С.287). Но он считал, что сама арифметика не имеет для этого оснований. И если в истории философии такое имело место, то лишь потому, что “возвышающийся над чувственным миром и познающий свою сущность дух, ища стихию для своего чистого представления, для выражения своей сущности, может поэтому до того, как постигнет, что эта стихия есть сама мысль, и обретет для ее изображения чисто духовное выражение, вздумать избрать для этого число, эту внутреннюю абстрактную внешность” (5. С.288). Как видим, применение

математики в философии, по Гегелю, было исторически преходящим явлением. Для доказательства этого он отсылает нас к древним, которые видели неудовлетворенность числовой формы для выражения мысли. Для него, чем “богаче определенностью и ...соотношением становятся мысли, тем, с одной стороны, более запутанным, а с другой - более произвольным и лишенным смысла становится их изложение в таких формах, как числа” (там же. С.290). Математические понятия /термины/ неприменимы для характеристики движения мыслей. Когда же все-таки подобное делают, то тем самым к мышлению предъявляется “самое жесткое требование. Мышление движется тогда в стихии своей противоположности, отсутствия соотношений. Его дело тогда становится работой безумия” (там же).

Но как мы уже говорили ранее, Гегель своим примером показал противоположное тому, о чем порой писал и что порой критиковал: во-первых, он был хорошо знаком с основными разделами современной ему математики и ее истории; во-вторых, содержание его работ нацеливает философов на изучение математики и ее истории. Действительно, что касается первого, то изучение математики Гегель рассматривал необходимой стороной, необходимой составной частью знаний философа. Причем, изучение философии он рекомендовал начинать с алгебры, физики, географии и других естественных наук. Что касается второго, то без знания основ элементарной и высшей математики трудно будет понять многие положения методологии математики, содержащиеся в “Феноменологии духа” и “Науке логики”.

Изучение основных работ Гегеля показывает, что, излагая категории “количество”, “качество”, “прерывность”, “непрерывность”, “конечное”, “бесконечное” и многие другие, он опирался на понимание их в математике, т.е. содержание понятий в математике служило ему источником обобщения и обогащения категорий в философии. А вся история математики и философии свидетельствует о том, что их взаимосвязь является не “крайним средством”

/Гегель/, а необходимостью и нормой научного философского мышления. На всех этапах развития математики и философии их союз в той или иной форме постоянно был. Философия во все времена, обобщая и синтезируя данные конкретных наук /в том числе достижения и математики/, обогащала и развивала свое содержание.

Однако критика Гегелем попыток абсолютизации методов математики в развитии научного познания была исторически необходимой. В конечном итоге она способствовала прогрессу знаний как в философии, так и в математике. Именно им был создан принципиально новый философский метод мышления - диалектический, правда, на идеалистической основе. И как замечает Маркс, Гегель “очень часто внутри спекулятивного изложения дает действительное изложение, захватывающее самый предмет” (7, т.2. С.66). Исследование Гегелем понятийного аппарата математического анализа было примером применения созданного им диалектического метода. Кроме того, видимость единственности математического пути для достижений истинных знаний затрудняла попытки осмыслить специфику философского знания и найти новые способы построения его. Нужно было, как отмечает Гегель, “снять с математики это фальшивое украшение”, “показать ее границы и отсюда - необходимость иного знания” (4. С.24).

4. По Гегелю, природа истин в математике “отличается от природы философских истин”. “Что касается математических истин, - писал он, - то еще в меньшей мере мог бы считаться геометром тот, кто знал бы теоремы Эвклида наизусть (auswendig), без их доказательства, не зная их внутреннее строение” (inwendig), (4. С.21). Гегель считает, что достоверность системы знаний в математике определяется достоверностью ее аксиом и логических правил вывода. И если ставится вопрос об истинности /обоснованности/ аксиом и правил вывода, то он решается не в области математики, а в области философии. Философия не может представить свое исходное начало в виде аксиом, не может для обоснования своих исходных принципов обращаться к

другим наукам. Своеобразная черта этой науки, справедливо пишет Гегель, состоит в том, что в ней ее понятия лишь по-видимому составляют начало.

Общепринятым критерием истинности аксиом математики считают практику, которая охватывает всю совокупность форм материальной преобразующей деятельности людей. Гегель же истинность в математике ограничивал лишь доказательностью. А как следует из теорем К.Гёделя природа математической истины кроется не только в ее доказуемости и не всегда истину можно подтвердить доказательством.

5. По мнению Гегеля, для философии свойственно многообразие философских систем, подходов. Причем такое многообразие было и есть безусловно необходимо для существования самой науки философии, что является ее существенной чертой. Математика же обладает большим постоянством, устойчивостью своих положений, теорий.

Это действительно в определенной степени так. Но на всех этапах развития как философии, так и математики всегда была философская система и математическая теория, которые занимали главенствующее положение, отражая наиболее полно потребности и идеалы своего времени. Примерами этого могут служить метафизический материализм, геометрия Евклида, теория множеств Кантора и т.п.

6. По мнению Гегеля, «в такой науке, как математика, ее история в отношении содержания имеет преимущественно своей приятной задачей лишь сообщать о новых добавлениях». Например, геометрическую систему Евклида он считает как ставшую науку, не имеющую истории, что касается истории философии, то она «не показывает ни постоянства простого содержания, к которому ничего больше не добавляется, ни только течения спокойного присоединения новых сокровищ к уже приобретенным раньше», ибо демонстрирует всегда возобновляющееся изменение целого.

Указанное Гегелем различие имеет определенное место, но это не дает оснований возводить его в постоянный принцип. Как преемственность, так и

изменчивость содержания предшествующих понятий и теорий свойственно и математическому, и философскому познанию. Достаточно сослаться на геометрию Лобачевского, включившую геометрию Евклида в качестве своего предельного, частного случая, что свидетельствует о предельном отношении областей их истинности; на учение Римана о пространстве постоянной кривизны, обобщившее обе эти геометрии; на интеграл Лебега, обобщивший понятие интеграла Римана; на открытия Гёделя и Козна в теоретико-множественной математике и т.п. И если такое различие на некотором этапе развития математики и философии было заметно, то не так рельефно, как считал Гегель.

7. Рассматривая связь истории математики и истории философии, соответственно, с математикой и философией, Гегель и здесь проводит некоторую грань. Он считает, что кто изучает историю физики, математики, - тот знакомится также с самой физикой, математикой. Но в философии, по его мнению, исторический подход особенно важен и необходим, ибо философия есть развивающаяся система как и история философии. Данное положение Гегеля имеет важное гносеологическое значение, ибо помогает верно определить место истории философии и истории математики в системе преподавания этих наук.

8. Наряду с раскрытием отличительных особенностей философии и математики, Гегель неоднократно подчеркивал и необходимость связи этих наук. Он писал: “Философия часто считается формальным, бессодержательным знанием и нет надлежащего знания того, что все, что в каком-нибудь знании и в какой-нибудь науке считается истиной и по содержанию, может быть достойно этого имени только тогда, когда оно порождено философией; что другие науки, сколько бы они ни пытались рассуждать, не обращаясь к философии, они без нее не могут обладать ни жизнью, ни духом, ни истиной” (4. С. 37).

Какие конкретно функции выполняет философия по отношению к математике? Этот вопрос специально, отдельно Гегелем не раскрывается, но тот анализ различных сторон математического познания, который он проделал в “Феноменологии духа” и “Науке логики”, позволяет нам утверждать, что философия, по Гегелю, помогает математике выявить ее специфические черты, определить место в системе наук, очертить методы и границы применения математики в области естественных наук и т.п. При этом он четко руководствуется тем, что философия и математика – качественно различные области научного знания. Предмет, методы и основные черты математического познания могут быть полезны и интересны для философов, но математиков он призывает придерживаться преимущественно своей науки, быть осторожными при вторжении в другие области, особенно в область философии.

В “Науке логики” вопрос о формах воздействия философии на математику получил дальнейшее развитие. Гегель считает, что только философия может дать истинное обоснование основным положениям математики. Практическая значимость философии в становлении и развитии математического знания конкретно показана им в области дифференциального и интегрального исчисления.

3. Анализ бесконечно малых в “Науке логики” Гегеля

Одним из крупнейших научных достижений 17 века в области математики считается завершение построения дифференциального и интегрального исчисления. К этому результату Ньютона и Лейбница привели, во-первых, интегральные методы Кеплера, Кавальера, Торричелли, Паскаля; во-вторых, дифференциальные методы Галилея, Роберваля, Ферма;

в-третьих, единство этих методов при решении задач на нахождение кривой по заданному общему свойству всех касательных к ней в работах Грегори, Валлиса, Барроу и других.

Практическая значимость вновь открытого исчисления на первых порах оставляла несколько позади вопрос об основании анализа бесконечно малых. Однако появление все новых и новых трудностей и противоречий в этой области привело к тому, что математики заговорили о втором кризисе в основаниях математики. На повестку дня стала проблема обоснования анализа бесконечно малых, для чего необходимо было выяснить /и четко определить/ понятие бесконечно малой величины.

В решении этой проблемы приняли участие Даламбер, Лагранж, Эйлер, позже Гаусс, Коши, Вейерштрасс и другие крупнейшие математики 18-19 вв. Не остались в стороне от решения проблемы и философы /Маркс, Энгельс, Гегель и другие/.

Рассмотрим некоторые воззрения Гегеля на природу математического анализа и на те проблемы, которые возникли при обосновании операций в области дифференциального исчисления.

Прежде всего он считает, что философское изучение математического анализа, математического бесконечного представляет значительный интерес. “Математическое бесконечное”, - пишет Гегель, - интересно, с одной стороны, ввиду расширения (сферы) математики и ввиду великих результатов, достигнутых благодаря введению его в математику; с другой же стороны, оно достойно внимания по той причине, что этой науке еще не удалось посредством понятия /понятия в собственном смысле/ обосновать правомерность его применения...

В философском же отношении математическое бесконечное важно потому, что в его основе действительно лежит понятие истинного бесконечного и оно куда выше, чем обычно называемое так метафизическое бесконечное /метафизическое бесконечное будет позднее названо

Г.Кантором, “актуально бесконечным” - В.М./, исходя из которого выдвигают против него возражения” (5. С.321).

Гегель разрабатывает собственную систему логического и философского обоснования не только дифференциального и интегрального исчисления, но и всей математики для выполнения основной философской задачи - раскрыть диалектику математического мышления. Он правильно определяет место дифференциального исчисления среди других разделов математики. “...По методу дифференциального исчисления сразу видно, - пишет Гегель, - что он изобретен и установлен не как нечто самодавяющее” (там же. С.360). Не элементарная математика по собственному произволу создала математический анализ, а потребности техники и естествознания. Исчисление в анализе бесконечно малых “разрешает и требует таких приемов, которые она /математика - В.М./ должна отвергать, оперируя конечными величинами, и в то же время она обращается со своими бесконечными величинами, как с конечными определенными количествами и хочет применять к первым те же приемы, которые применяются к последним” (там же. С.322). По Гегелю, сама по себе математика не в состоянии точно выяснить “метафизику своего собственного понятия”, дать обоснование тем приемам, которые делают необходимым применение бесконечного. Это можно сделать только с использованием понятийного аппарата философии. Однако в силу диалектического характера понятий и методов математики бесконечного, она может выступать областью эффективного применения философского знания, что будет способствовать развитию как философии, так и математики.

Какие проблемы ставит и каким образом их решает Гегель в своей “Науке логики”, когда проводит философский анализ математики бесконечного?

Прежде всего он рассматривает диалектику формирования начала в математическом анализе. Введение переменной величины, функции

изменило представление о структурной единице математики как сложной системы. Основная его задача - “рассмотреть более внимательно математическое понятие бесконечного” и различные попытки математиков оправдать применяемый ими метод.

Гегель диалектически анализирует определение “бесконечной величины” как структурной единицы современной ему математики. “Обычное определение математического бесконечного, - пишет он, - гласит, что оно есть величина, больше которой, если она определена как бесконечно большая, или меньше которой, если она определена как бесконечно малая, уже нет или - в другой формулировке - как величина, которая в первом случае больше, а во втором меньше любой другой величины” (5. С. 323-324). В этом определении, замечает Гегель, бесконечно трактуется как определенное количество. Но так как в математике под величиной понимается то, что может быть увеличено или уменьшено, и “так как бесконечно большое или бесконечно малое есть нечто такое, что уже больше не может быть увеличено или уменьшено, то оно на самом деле уже не определенное количество, как таковое”. Он требует, чтобы /во избежании затруднений/ “определенное количество, когда оно бесконечно, мыслилось как нечто снятое, как нечто такое, что не есть определенное количество, но количественная определенность чего все же сохраняется” (там же. С. 324).

По Гегелю, снятое бесконечное определенное количество выступает уже в несколько иной форме. “Оно уже не конечное определенное количество, не определенность величины, которая имела бы наличное бытие как определенное количество, оно нечто простое и потому дано лишь как момент; оно определенность величины в качественной форме; его бесконечность состоит в том, что оно дано как некоторая качественная определенность. - Таким образом, как момент оно находится в сущностном единстве со своим иным, дано лишь как определенное этим своим иным, т.е. оно имеет значение лишь в связи с чем-то находящимся с ним в отношении”

(5. С.326). Как “единство обоих моментов - количественной и качественной определенностей” - бесконечное определенное количество “есть прежде всего отношение” (там же. С.403).

Чтобы понятие бесконечного было более доступным, Гегель рассматривает “различные ступени выражения определенного количества как момента отношения, начиная с низшей ступени, на которой оно еще есть также определенное количество, как таковое, и кончая высшей, где оно приобретает значение и выражение бесконечной величины в собственном смысле” (там же. С.326). В качестве первого примера он анализирует отношение, выраженное дробным числом $2/7$. Эта дробь не есть такое же определенное количество, как 1, 2, 3 и т.д., хотя и представляет собой обычное конечное число. Числа 2 и 7 выступают как моменты друг друга и тем самым некоторого третьего /по Гегелю, определенного количества, которое называется показателем/. “Они имеют значение не как 2 и 7, а лишь со стороны их определенности относительно друг друга. Поэтому можно вместо них с таким же успехом поставить также 4 и 14 или 6 и 21 и т.д. до бесконечности. Тем самым они, следовательно, начинают приобретать качественный характер” (там же. С.327).

Итак, отношение чисел 2 и 7 может быть записано бесконечным множеством пар других таких чисел, что определенность отношения не изменит величину дроби. Но такое изображение бесконечности в числовой дроби, по Гегелю, несовершенно, ибо сами числа 2 и 7 могут быть изъяты из отношения и предстанут обыкновенными определенными количествами. В этом случае, дробь $\frac{a}{b}$ является “более подходящим выражением бесконечного, так как a и b, изъятые из их соотношения, остаются неопределенными и не имеют особой им принадлежащей величины, даже будучи отдельны друг от друга” (5. С.328). Правда, замечает он, в таком представлении буквы есть определенное конечное количество, для которых безразлично находятся ли они в отношении или вне его.

Поэтому Гегель продолжает анализировать то, что имеется в отношении, и находит новые его стороны. Дробь $2/7$ может быть выражена как $0,285714...$; дробь $1/1-a$ - как $1 + a + a^2 + a^3 + \dots$, т.е. как бесконечные ряды. В такой форме можно выразить любую дробь, переходя в случае надобности, к другой системе счисления. Представляя дробь как численность в виде бесконечного ряда, мы устраняем такую ее сторону, как отношение. С другой стороны, мы не видим, что она “в самой себе имеет бесконечность. Но эта бесконечность вошла другим способом, а именно сам ряд бесконечен” (там же. С.329).

Такая бесконечность ряда, по Гегелю, есть “дурная бесконечность прогресса”. Сам же ряд содержит в себе противоречие: с одной стороны он выступает отношением и несет внутри себя качественную природу; а с другой стороны, изображается лишенным отношения, как численность, как определенное количество. Следствием противоречия является то, что в численности, выраженной бесконечным рядом, всегда “чего-то недостает”, хотя, продолжая ряд, можно его численность сделать “столь точной, сколько это нужно”. А это, в свою очередь, свидетельствует о том, что изображение численности посредством бесконечного ряда выступает лишь долженствованием, ибо оно “обременено неким потусторонним, которое не может быть снято, так как попытка выразить в виде численности то, что основано на качественной определенности, есть постоянное противоречие” (5. С.329). В связи с этим, Гегель различает два вида бесконечного: бесконечный ряд и истинное актуальное математическое бесконечное, причем неточность в бесконечном ряде выступает лишь как видимость в истинном математическом бесконечном.

Чем отличаются друг от друга такие бесконечности?

Различие этих бесконечностей состоит в том, что в бесконечном ряде отрицательное находится вне его членов. В конечном же его выражении, которое есть отношение, отрицательное имманентно /пребывает в самом

себе/ как определяемость сторон отношения друг другом и, следовательно, “имеет внутри себя определение бесконечности” (там же. С.330). Итак, дробь $2/7$ или $1/1$ -а есть отношение, и это конечное выражение есть истинное бесконечное выражение, заключает Гегель. Что касается бесконечного ряда, то он есть сумма, есть скорее конечное выражение, есть определенный квант. Правда квант гораздо “меньший, чем тот, которым он должен быть”, ибо то, “чего ему недостает, также есть определенный квант” и “эта недостающая часть есть на самом деле то, что называется в ряде бесконечным только с той формальной стороны, что она есть нечто недостающее, некоторое небытие” (там же. С.331).

Далее Гегель переходит к анализу переменных величин и их отношению. Причем его интересуют такие отношения, в которых переменные находятся в разных степенях. В этом случае отношение выступает как переменное определенное количество. Он рассматривает функцию $y^2/x = P$, подчеркивая, что x находится в отношении не к y , а к квадратному y . Такое “отношение величины к степени есть не определенное количество, а качественное по своему существу отношение” (5. С.335).

Исследуя степенные отношения, Гегель приходит к дифференциальному исчислению, ибо оно касается степенных определений и оперирует качественными формами величин. В этом специфика исчисления и он ее раскрывает: “В уравнении, в котором x и y положены прежде всего как определенные некоторым степенным отношением, x и y , как таковые, должны еще означать определенные количества; и вот это значение совершенно утрачивается в так называемых бесконечно малых разностях. dx , dy уже не определенные количества и не должны иметь значения таковых, а имеют значение лишь в своем соотношении, имеют смысл только как моменты. Они уже не нечто, если принимать нечто за определенное количество, они не конечные разности; но они и не ничто, не нуль, лишенный определения. Вне своего отношения они чистые нули, но их следует брать

только как моменты отношения, как определения дифференциального коэффициента dx/dy ” (там же. С.336). Причем само отношение dx/dy должно пониматься как единый неделимый знак.

Гегель против такого понимания бесконечно малых, когда они определяются “как величины, существующие в своем исчезновении - не до своего исчезновения, ибо в таком случае они конечные величины, и не после своего исчезновения, ибо в таком случае они ничто” (там же. С.165). Здесь Гегель имеет в виду попытку Ньютона изгнать бесконечно малые и заменить их понятием первых и последних отношений исчезающих величин (см.: 10. С.64).

Гегель считает, что математики не понимают того, что в области дифференциального и интегрального исчисления “определенное количество поистине завершено в некоторое качественное наличное бытие” (5. С.336), что бесконечно малые есть среднее состояние между бытием и ничто. Против этого, по его мнению, и направлены все нападки математиков, в то время как “математика обязана своими самыми блестящими успехами тому, что она приняла то определение, которого не признает рассудок” (там же. С.165).

Обращая внимание на то, что правомерность операций с бесконечно малым в конечном счете основывается “на правильности результатов”, на правильности, “доказанной из других оснований”, но не на ясности предмета и действий, благодаря которым достигнуты эти результаты” (там же. С.321); что действия в дифференциальном и интегральном исчислении “находятся в полном противоречии с природой чисто конечных определений и их соотношений” (там же. С.337); что обоснование их возможно только в понятии, Гегель ставит перед собой задачу изучить основные взгляды по рассматриваемому вопросу, опираясь на историю математики. При этом он стремится показать, что воззрения Кавальери, Ньютона, Карно, Эйлера, Лагранжа, Лейбница, Ферма, Декарта, Барроу и других известных математиков в принципе согласуются с его позиций, с развитым им

понятием, но “авторы не исследовали этой мысли как понятие” и оперируя бесконечно малым, прибегали к уловкам, “противоречащим тому, что они хотели добиться” (там же. С.338). Гегель резок с теми, кто оправдывает свои операции с бесконечно малыми величинами различными трюками и вывертами. “Видимость случайности, - пишет он, - представляемая дифференциальным исчислением в разном его применении, упростилась бы уже пониманием природы сфер применения и специфической потребности и условия этого применения. Но в самих этих сферах важно далее знать, между какими частями предметов математической задачи имеет место такое отношение, которое специфически полагается дифференциальным исчислением” (5. С.370-371).

Эта мысль Гегеля созвучна с высказыванием Ф.Энгельса: “...Как только математики укроются в свою неприступную твердыню абстракции, так называемую чистую математику, все... аналогии забываются; бесконечное становится чем-то совершенно таинственным. и тот способ, каким с ним оперируют в анализе, начинает казаться чем-то совершенно непонятным, противоречащим всякому опыту и всякому смыслу. Те глупости и нелепости, которые математики не столько объясняли, сколько извиняли этот свой метод, приводящий странным образом всегда к правильным результатам, превосходит самое худшее, действительное и мнимое фантазерство натурфилософии /например, гегелевской/, по адресу которого математики и естествоиспытатели не могут найти достаточных слов для выражения своего ужаса. Они сами делают - притом в гораздо большем масштабе-то, в чем упрекают Гегеля, а именно доводят абстракции до крайности” (7. Т.20. С.585). Как видим, Энгельс не только критикует математиков 17-18 вв., не сумевших обосновать правомерность своих операций с бесконечно малым, но и в определенной мере смягчает недостатки гегелевской философии математики.

Рассмотрев трактовку бесконечно малых и выполняемых с ними операции Ньютоном, Карно, Эйлером, Лагранжем, Гегель пишет, что он не будет приводить воззрения других математиков по этому вопросу, ибо для них характерно возвращение к конечной определенности количества. При выполнении операций над бесконечно малыми они не могут “обойтись без представления о лишь относительно малом. Исчисление делает необходимым подвергать так называемые бесконечные величины обычным арифметическим действиям сложения и т.д., основанным на природе конечных величин, и тем самым хотя бы на мгновение признавать эти бесконечные величины конечными и трактовать их как таковые. Исчисление должно было бы обосновать правомерность того, что оно, с одной стороны, низводит эти величины, вовлекает их в эту сферу и трактует их как приращения или разности, а с другой - пренебрегает ими как определенными количествами после того, как оно только что применяло к ним формы и законы конечных величин” (5. С.344). Как видим, Гегель вполне определенно говорит о противоречивости конечного и бесконечного, о том, что математика конечных величин качественно отлична от математики бесконечного.

История математики свидетельствует, что в большинстве случаев математики 17-18 вв. обращали внимание лишь на эффективность нового метода исчисления, делали попытки обойтись без понятия бесконечного; действия анализа связывали с предметно-чувственными явлениями, а основные понятия интерпретировали с помощью геометрического метода /в частности, метода исчерпывания, изобретение которого приписывается Евдоксу; метода интегральных сумм; метода аналогии и других/. Давая оценку различным попыткам обосновать анализ бесконечно малых, Гегель подчеркивает, что все “старания новейших аналитиков были направлены главным образом на то, чтобы вновь привести исчисление бесконечно малых к очевидности собственно геометрического метода и с помощью этого

метода достигнуть в математике строгости доказательств древних /выражения Лагранжа/. Однако так как принцип анализа бесконечного по своей природе выше, чем принцип математики конечных величин, то анализ бесконечного сразу же сам собой должен был отказаться от этого рода очевидности, подобно тому как философия также не может притязать на ту отчетливость, которая присуща наукам о чувственном, например естественной истории, или подобно тому как еда и питье считаются более понятным занятием, чем мышление и постижение посредством понятия ...” (5. С.344-345).

Гегель приводит “удивительный прием Ньютона”, “остроумную уловку”, которая позволяет избежать отбрасывания произведения бесконечно малых величин или их степеней при нахождении дифференциалов. Ньютон находит дифференциал произведения двух функций следующим образом: определяются произведения $\underline{x}$ и $\underline{y}$, уменьшенных (и увеличенных) на половину их бесконечно малой разности, т.е. $(x - dx/2) \cdot (y - dy/2) = xy - xdy/2 - ydx/2 + dx \cdot dy/4$ (1),

$$(x + dx/2) \cdot (y + dy/2) = xy + xdy/2 + ydx/2 + dx \cdot dy/4 \quad (2).$$

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получим: $y \cdot dx + x \cdot dy$. Эта разность, по Ньютону, “есть избыток приращения на целые dx и dy , так как именно этим приращением отличаются оба произведения; следовательно, это и есть дифференциал xy ” (там же. С.347). “Однако, - пишет Гегель, - при всем уважении к имени Ньютона следует сказать, что это, хотя и весьма элементарное, действие неправильное; неправильно, что $(x + dx/2) \cdot (y + dy/2) - (x - dx/2) \cdot (y - dy/2) = (x + dx) \cdot (y + dy) - xy$. Только потребность обосновать ввиду его важности исчисление флюксий могла заставить такого математика, как Ньютон, обмануть себя подобным способом доказательства”, - совершенно справедливо замечает философ (там же. С.347).

Что касается других методов дифференцирования, которыми пользовался Ньютон /в частности, разложение функции в ряд/, то они так же,

по Гегелю, содержали ошибки, страдали формализмом и неуверенностью. Критикуя Ньютона /а вместе с ним и других математиков/ за формализм и пренебрежение к бесконечно малым, выраженное в необоснованном их отбрасывании, Гегель раскрывает диалектическую природу этих величин: "... члены ряда должны рассматриваться здесь не только как части некоторой суммы, но как качественные моменты некоторого понятия как целого. Благодаря этому отбрасывание остальных членов, принадлежащих к дурному бесконечному ряду, имеет смысл, совершенно отличный от отбрасывания их на основании их относительной малости. Решение задачи, данное Ньютоном, оказалось ошибочным не потому, что в нем не принимаются во внимание члены ряда лишь как части некоторой суммы, а потому что не принимается во внимание член, содержащий качественное определение, которое здесь важнее всего" (5. С.348-349).

Для уяснения этой мысли Гегеля, рассмотрим нахождение дифференциала функции $y=x^3$ некоторыми учеными. Имеем $dy = y_1 - y = (x+dx)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 \cdot dx + 3x \cdot (dx)^2 + (dx)^3 - x^3 = 3x^2 \cdot dx + 3x \cdot (dx)^2 + (dx)^3$. Пренебрегая, вследствие их малости, двумя последними слагаемыми, получим $dy = 3x^2 \cdot dx$, т.е. дифференциал функции $y = x^3$.

Гегель прав, когда отмечает, что в области математического анализа, ввиду "туманного понятия бесконечно малого", те или иные доказательства принимались потому, что всегда заранее было известно, что должно получиться. Это создавало "видимость остова доказательства... Но я не колеблясь скажу, - пишет он, - что рассматриваю эту манеру просто как фокусничество и жонглирование доказательствами и причисляю к такого рода фокусничанию даже Ньютоновы доказательства..." (там же. С.358). Но вместе с этим он признает, что при всей противоречивости своих операций сама математика показывает, что те результаты, которые он получает с помощью методов дифференциального исчисления, " вполне совпадают с теми, которые она получает с помощью собственно математического метода,

геометрического и аналитического метода” (5.С.322). Правда Гегель замечает, что это касается не всех результатов и не может служить оправданием характера пути, по которому часто следовали математики.

Однако в целом, Гегель высоко ценил работы Ньютона, Лейбница и других математиков, так как считал, что они проложили новые пути в математической науке. Занимаясь созданием дифференциального и интегрального исчисления, они чувствовали потребность освободить приемы вычисления от характера чисто внешних правил, старались дать им требуемое оправдание, оставаясь в плену метафизики.

В примечании “Цель дифференциального исчисления, вытекающая из его применения” Гегель пишет, что им достигнута абстрактная определенность понятия бесконечно малого: “это качественная определенность таких количеств, которые прежде всего как определенные количества положены находящимися в отношении друг к другу...” (там же. С.361). Действительно, как мы отмечали уже ранее, переменные величины (dx и dy) понимаются им необособленно друг от друга, а как моменты dx/dy и само dx/dy следует рассматривать как единый неделимый знак. Последующее обоснование анализа бесконечно малых он усматривал в том, чтобы “развить дальше теоретическую сторону, определенность понятия”, совершив переход от него к математической форме и ее применению.

Понятийная определенность дифференциального исчисления в наиболее общем виде выражается Гегелем в степенном отношении. “Но ответ на вопрос, какие именно из... отношений... составляют собственно предмет и интерес дифференциального исчисления, должен быть почерпнут из него самого, т.е. из его так называемых применений” (5. С.362). В результате устанавливается, что специфическим предметом дифференциального исчисления являются переменные величины, причем “по крайней мере одна из этих величин или даже все они имеют степень выше первой ...” (там же. С. 364). В связи с этим вновь уместно вспомнить Ф. Энгельса: “Старик Гегель...

вполне правильно угадал, говоря, что дифференцирование в качестве основного условия требует, чтобы обе переменные имели различные степени и чтобы по меньшей мере одна из них была во второй или $1/2$ -й степени” (7. Т. 35. С.17).

Гегель подробно исследует области научного знания, в которых применяется дифференциальное исчисление. В частности, высшую геометрию, механику.

Не обходит он стороной и интегральное исчисление, которое определяется им как действие, обратное дифференцированию. Интегрируя, исходят из функции, рассматриваемой как производная, как коэффициент ближайшего члена, получающегося в результате разложения в ряд некоторого, пока еще не известного уравнения, а из этой производной должна быть найдена первоначальная степенная функция. Помимо нахождения первоначальной функции, интегрирование имеет задачу узнать, какое предметное значение имеет эта функция, каково ее практическое применение.

Заканчивая краткий обзор вопросов дифференциального исчисления в “Науке логики” Гегеля, следует отметить, что хотя он и утверждал отсутствие диалектики в математике, отсутствие переходов и внутренних связей между ее разделами, тем не менее сам же в области анализа бесконечно малых постоянно демонстрировал проявление основных законов диалектики.

Если же говорить о гегелевской концепции обоснования анализа бесконечно малых и давать ей оценку, то следует сказать, что она не могла удовлетворить даже современных ему математиков. Многим из них уже была известна точка зрения Коши по данному вопросу, по существу противоположная гегелевской. В частности, если Гегель понятие непрерывности, предела функции оценивал недостаточно содержательными и стремился освободить от них анализ бесконечно малых, то Коши, дав этим

понятиям строгое определение, кладет их в основу этой области научного знания.

Однако указывая на это различие, нужно иметь в виду, что Гегель не был математиком и, следовательно, не мог охватить всю совокупность знаний в области анализа бесконечно малых, да и других областей современной ему математики.

Заключение

Значение гегелевских положений и идей в области математики и ее методологии мы усматриваем в том, что

- Гегель вплотную подошел к научному определению предмета математики и тем самым определил ее место в системе наук;
- Установил неразрывную связь качественных и количественных изменений в математике;
- Определил причины возникновения дифференциального исчисления, которые связаны не только с внутренними потребностями математики, но и с практикой;
- Правильно подошел к решению проблемы обоснования анализа бесконечно малых, показал противоречивый характер в этой области;
- Показал невозможность сведения математического анализа к элементарной математике;
- Установил, что метод дифференциального исчисления может быть понят из характера области его применения;
- Стремился к обобщению математических теорий на философской основе и призывал находить “реальный смысл” теоретических построений в математике;
- Показал, что математика зачастую при решении своих внутренних проблем обращается к философии и ее методологии.

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Д. Математика и диалектика // Сибирский математический журнал. 1970. Т. 11. № 2.
2. Бурбаки Н. Очерки по истории математики М., 1963.
3. Гегель. Энциклопедия философских наук. Сочинения. М. 1956. Т. 3.
4. Гегель. Феноменология духа. Сочинения. М., 1959. Т. 4.
5. Гегель. Наука логики. - М. 1970. Т. 1.
6. Кедровский О.И. Взаимосвязь философии и математики в процессе исторического развития. - Киев, 1974.
7. Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения. Изд. 2
8. Мейдер В.А. Гегель об отличительных особенностях философии и математики. - Сб.: Методологические проблемы физики /Материалы конференций 1976-1978 гг./ - М., 1980
9. Мордухай - Болтовский Д.Д. Психология математического мышления //Вопросы философии и психологии. - Год 19. КН. 4 /94/.
10. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. СПб., 1915.
11. Пуанкаре А. Наука и метод СПб., 1910.
12. Сигети И. Г. Гегель и Г. Кантор // Вопросы философии. 1975. № 9
13. Яновская С.А. Категория количества у Гегеля и сущность математики // Под знаменем марксизма. 1928. № 3.
14. Яновская С.А. Гегель и математика // «Под знаменем марксизма». 1931. № 11-12.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Философские воззрения Гегеля на математику и математическое познание
2. Гегель об отличительных особенностях философии и математики
3. Анализ бесконечно малых в “Науке логики” Гегеля

Заключение

Используемая литература